FONCTIONS RECIPROQUES

Titre	Description	Remarques

- Définitions:

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur f(I) si pour tout y de f(I) l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

• Soit f une bijection de I sur f(I). On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur f(I) qui à tout y de f(I) associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.
Il on découle que :
$\forall x\in I$ et $\forall y\in f(I)$, $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$
et $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$ et aussi $\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=y$.

- Théorèmes (bijection)

• Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur f(I) et on a :

• f^{-1} possède le même sens de variation que f.

• $\begin{cases} x=f(y) \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}$

• (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à $\Delta: y=x$..

• Théorème : (dérivabilité de f^{-1})

Si $\begin{cases} \bullet f \text{ est strictement monotone sur I} \\ \bullet f \text{ est dérivable sur I} \\ \bullet f' \text{ ne s'annule jamais sur I} \end{cases}$ alors f^{-1} est dérivable sur f(I)

et on a pour tout $x\in f(I)$, $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'(y)}$ avec $y=f^{-1}(x)$

TuniSchool.tn